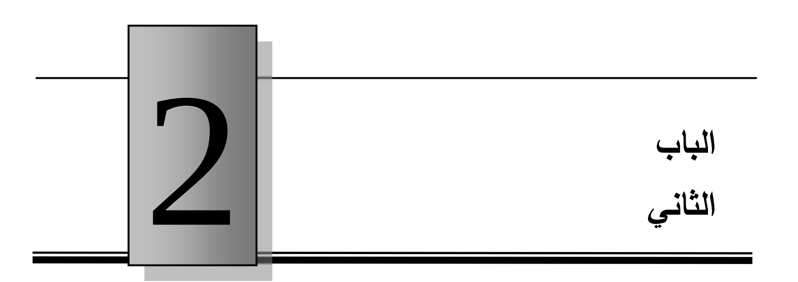
الجزء الثانـي

التراكيب المنفصلة
Discrete Structures



د. عمر زرتي
Dr. Omar Zarty
قسم الحاسوب \كلية العلوم \ جامعة طرابلس



الفئـــات Sets

2.1 مقدمة

الفئة هي مجموعة من العناصر ذات خاصية مشتركة. فمثلا عندما نشير إلى فئة الطلبة المسجلين في مقرر «التراكيب المنفصلة» في كلية ما، فإن عناصر هذه الفئة هم طلبة الكلية المسجلين بهذا المقرر، والخاصية المشتركة بين هؤلاء الطلبة هي التسجيل في المقرر.
ونظرا لما للفئات من أهمية في وصف التراكيب المنفصلة، سندرس في هذا الباب ما يتعلق بالفئات من تعاريف ومبرهنات أساسية.

2.2 رموز الفئات

نستخدم الأقواس { } في سرد عناصر الفئة ، فمثلا فئة الأعداد الفردية من 1 إلى 10، يمكن كتابتها بطريقة السرد كما يلي:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

وقد تكون عناصر الفئة غير محدودة، فمثلا فئة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة ، عناصرها غيرمحدودة infinite ، ويمكن كتابتها كالآتي:

$$A = \{1, 2, 3, \dots \}$$

حيث تم استخدام النقط للتعبير عن الاستمرار الى مالانهاية.

ويمكن وضع هذه النقط أيضا من اليسار فمثلا الفئة

$$Z = \{\dots,-3,-2,-1 , 0 ,1 ,2 ,3,\dots\}$$

هي فئة جميع الأعداد الصحيحة.

إذا كان a عنصر ينتمي إلى الفئة A نكتب: $a \in A$

وإذا كان a لا ينتمي إلى A نكتب: $a \notin A$

الفئة الخالية هي الفئة التي لا يوجد بها أي عنصر،ونرمز لها بالرمز Φ (empty set) وأحيانا نرمز لها بالرمز { } .

والفئات التالية فئات خاصة ذات استخدام شائع لذلك تم تخصيص رموز متعارف عليها كما يلي:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ the set of **natural numbers**.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ the set of **integers**†.

$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \text{ and } q \neq 0\}$ the set of fractions or **rational numbers**.

$\mathbb{R}$ = the set of **real numbers**;

$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R} \text{ and } i^2 = -1\}$ the set of **complex numbers**.

أي أن N هي فئة الأعداد الطبيعية ، و Z هي فئة الأعداد الصحيحة، و Q هي فئـة الأعـداد القياسـية، و R هـي فئـة الأعـداد الحقيقيـة، و C هـي فئـة الأعـداد المركبة.

2.3 تساوي الفئات

الفئتان A و B متساويتان إذا كان لهما نفس العناصر (بغض النظر عن ترتيبها).

مثال: هل الفئتان :

$$A = \{1, 3, 5\}$$
$$B = \{5, 3, 1\}$$

متساويتان ؟

الإجابة: نعم لأن لهما نفس العناصر.

مثال: هل الفئتان:

$$A = \{3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{3, 3, 4, 5, 5, 6\}$$

متساويتان ؟

الإجابة: نعم لأن العنصر المتكرر يحسب مرة واحدة.

تعريف: الفئة

$$A = \{x: p(x)\}$$

هي الفئة التي عناصرها القيم x بحيث p(x)=true .

مثلا الفئتان:

$$A = \{ x : x \text{ is an odd positive integer}\}$$
$$B = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

متساويتان. لاحظ أن odd تعني فردي و positive تعني موجب و integer تعني صحيح.

كما أن :

$$\{x: x^2 -3x + 2\} = \{ 1, 2\}$$

2.4 الفئة الجزئية

نقول أن A فئة جزئية من الفئة B إذا (وفقط إذا) كان كل عنصر في A موجود أيضا في B .

ونرمز للفئة الجزئية بالرمز ⊆ .أي أن: $A \subseteq B$

تعني أن A فئة جزئية من B . أي أن : $\forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B)$

The set A is a **subset** of the set B, denoted $A \subseteq B$, if every element of A is also an element of B. Symbolically, $A \subseteq B$ if $\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ is true, and conversely.

لاحظ أن الفئة الفارغة (أو الخالية) هي فئة جزئية لأي فئة أخرى S، أي أن:

$$\varnothing \subseteq S$$

كما أن أي فئة هي فئة جزئية من نفسها ، أي: $A \subseteq A$

ملاحظة : عندما نكتب

$$A \subset B$$

نقصد أن A لا تساوي B بل جزء منها فقط .

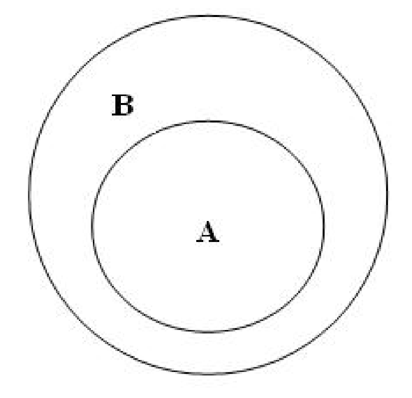
مثال

الفئة {1, 2} هي فئة جزئية من الفئة {1 , 3, 2} ويمكن كتابة ذلك كما يلي:

$$\{1 , 2\} \subset \{1 , 3, 2\}$$

وعادة ما نستخدم الدوائر في تمثيل علاقات الفئات ، وتسمى هذه الدوائر بأشكال فن Venn diagrams . فمثلا لتمثيل الفئة الجزئية نرسم دائرة صغيرة نمثل الفئة الجزئية داخل دائرة أكبر كما في الشكل التالي:





$A \subset B$

لاثبات أن الفئتين A و B نلاحظ أن

A=B if and only if $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$

وهذا يشبه الاستنباط المزدوج الذي درسناه في علم المنطق:

$p \leftrightarrow q$ تكافئ $(p \to q) \land (q \to p)$

2.2 فئة القوى Power set

هي الفئة التي عناصرها جميع الفئات الجزئية للفئة الأصلية .

أي إذا كان لدينا فئة S فان فئة القوى (ونرمز لها بالرمز P(S)) هي فئة جميع الفئات الجزئية للفئة S.

مثال: ما هي فئة القوى للفئة {0,1,2}؟

الإجابة:

$$P\{0,1,2\} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

لاحظ أن الفئة الخالية $\varnothing$ والفئة نفسها تكون عناصر لفئة القوى . لاحظ أيضا أن فئة القوى في هذا المثال تحتوي على 8 عناصر بينما الفئة الأصلية تحتوي فقط على 3 عناصر. هذا يدفعنا للسؤال عن العلاقة بين عدد العناصر في الفئتين.

تعريف : رتبة الفئة cardinality هي عدد العناصر في الفئة. ونرمز لها بالرمز $|A|$.

مثال: ما هي رتبة الفئة $A = \{7,8,9\}$

الإجابة:

$$|A| = 3$$

الآن يمكننا كتابة العلاقة بين رتبة الفئة S ورتبة فئة القوى P(S) على النحو التالي:

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

وسنقوم باثبات هذه العلاقة في الأبواب القادمة بإذن الله.

وعلى سبيل المثال فإن:

$$|P\{7, 8, 9\}| = 2^3 = 8$$

2.3 ضرب الفئات (الضرب الكارتيزي):

دع A , B فئتان. حاصل الضرب الكرتيزي لهما هو فئة جميع الأزواج المرتبة (a , b) حيث $a\in A$, $b\in B$ أي أن:

$$A \times B = \{(a, b): a\in A \land b\in B\}$$

مثال: أوجد الضرب الكارتيزي للفئتين :

$$A = \{ 1 , 2\} \qquad B=\{ a , b , c\}$$

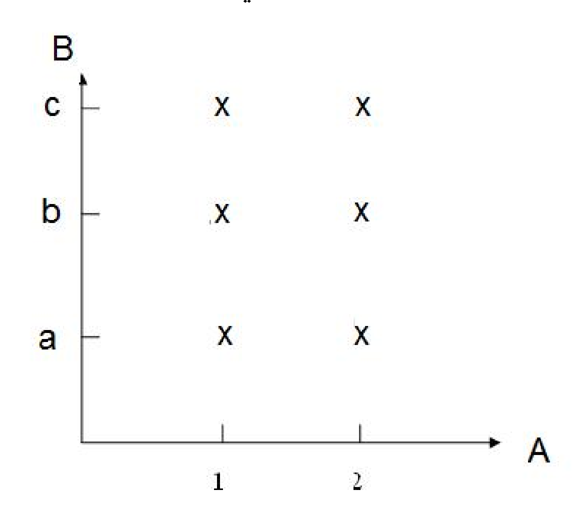
الاجابة:

$$A \times B = \{(1,a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

لاحظ أن :

$$A \times B \neq B \times A$$

التمثيل البياني لهذه الفئة يمكن رسمه كما يلي:



كما نلاحظ أن

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

تعريف:

الضرب الكارتيزي لثلاث فئات هو الفئة

$$A \times B \times C = \{(a, b, c): a\in A , b\in B , c\in C\}$$

2.4 تمارين (4)

(1) اسرد عناصر الفئات التالية:

(أ) $A = \{x : x \text{ is a real number and } x^2=1\}$

(ب) $B = \{x : x \text{ is positive integer less than } 12\}$

(ج) $C = \{x : x \text{ is a square of an integer and } x<100\}$

(د) $D = \{x : x \text{ is an integer and } x^2=2\}$

(2) بين ما إذا كانت الجمل التالية صحيحة (T) أم خاطئة F .

(أ) $\{1,3,5\} = \{1,3,3,5\}$ T F

(ب) $\{1،\{1\}\} = \{\{1\} ،1\}$ T F

(ج) $\{\{2\}\} = \{2\}$ T F

(د) $\varnothing=\{\varnothing\}$ T F

(3) في الفئات التالية بين ما إذا كان 2 عنصر في الفئة:

A = {x∈R: x is integer greater than 1}

B = {x∈R: x is the square of an integer}
C = {2,{2}}
D = {{2},{2,{2}}}
E = {{{2}}}

(4) هل الجمل المنطقية التالية True أم False ؟

a) $x \in \{x\}$
b) $x \subseteq \{x\}$
c) $\{x\} \subseteq \{x\}$
d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
e) $\varnothing \subseteq \{x\}$
f) $\varnothing \in \{x\}$

(5) إذا كانت A , B , C ثلاث فئات بحيث A⊆B ، B⊆C أثبت أن A⊆C

(6) مل هي رتبة الفئات التالية :

a) {a}
b) {{a}}
c) {a,{a}}
d) {a,{a} ,{a,{a}}}

(7) أوجد فئة القوى Power Set للفئات التالية:

أ – $\{a\}$

ب– $\{a, b\}$

ج– $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

(8) دع $A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{y, z\}$

أوجد:

$B\times A$, $A\times B$

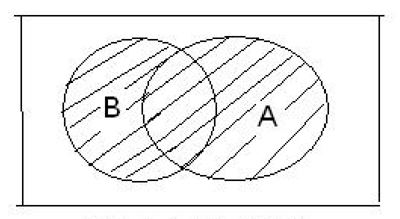
2.5 العمليات على الفئات Set Operations

تعريف(1): الإتحاد Union

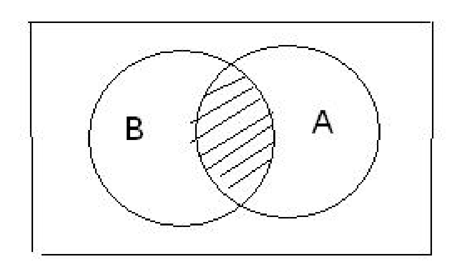
$A\cup B =\{x: x\in A \vee x\in B\}$

تعريف(2): التقاطع Intersection

$A\cap B =\{x: x\in A \wedge x\in B\}$



الشكل المخطط يمثل اتحاد الفئتين



الشكل المخطط يبين تقاطع الفئتين

مثال:

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{2, 3, 4\}$

$A \cup B = \{1, 2 , 3, 4\}$

$A \cap B = \{2, 3\}$

تعميم الاتحاد والتقاطع إتحاد الفئات A_1 , A_2 ,…, A_n هو

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$$

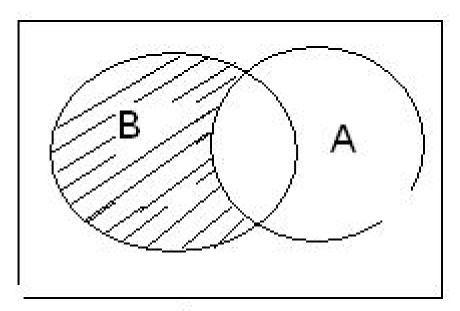
وتقاطع هذه الفئات هو

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap A_n$$

تعريف(3): الفرق difference بين الفئتين B , A هو:

$$B - A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$

ويمكن تمثيلها بالشكل التالي:

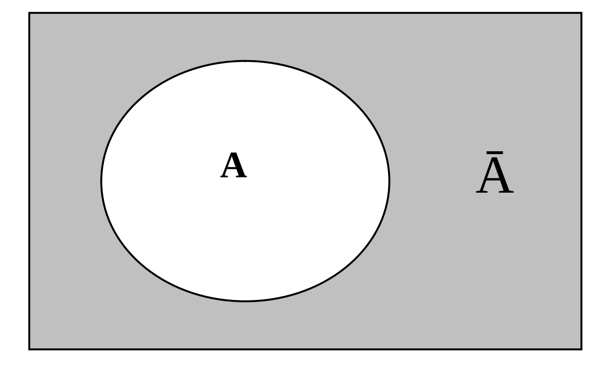


الشكل المخطط يبين الفرق بين الفئتين B-A

تعريف(4): الفئة المكملة Complement

$$\bar{A} = \{ x : x \notin A \}$$

الفئــة المكمــلة (المساحة المظللة)



مثال:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$B = \{6, 7, 8, 9\}$$
$$A - B = \{3, 4, 5\}$$

مثال: إذا كانت

U = {x : x is integer }
A = {x : x is integer > 10}

حيث U الفئة الشاملة، أوجد $\bar{A}$.

الإجابة:

$$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

2.6 بعض قوانين الفئات:

(1) قوانين الوحدة identity Laws

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap S = A$$

(2) قوانين الهيمنة Domination Laws

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup S = S$

حيث S الفئة الشاملة

(2) قوانين المثل Idempotent Laws

$A \cap A = A$ $\quad\quad$ $A \cup A = A$

(4) قانون المكمل Complementation Laws

$\bar{\bar{A}} = A$

(5) قوانين التبديل Commutative Laws

$A \cap B = B \cap A$ $\quad\quad$ $A \cup B = B \cup A$

(6) قوانين الدمج Associative Laws

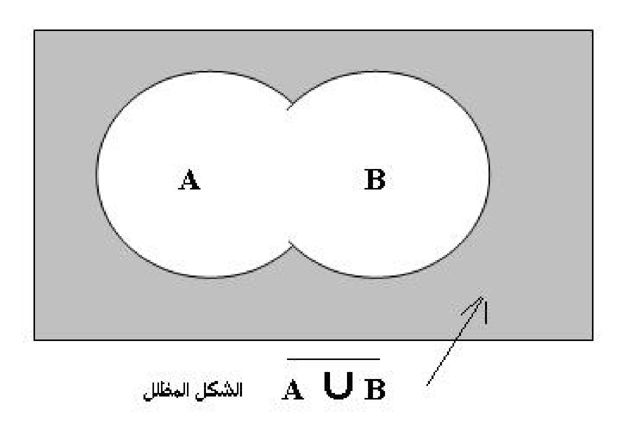
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

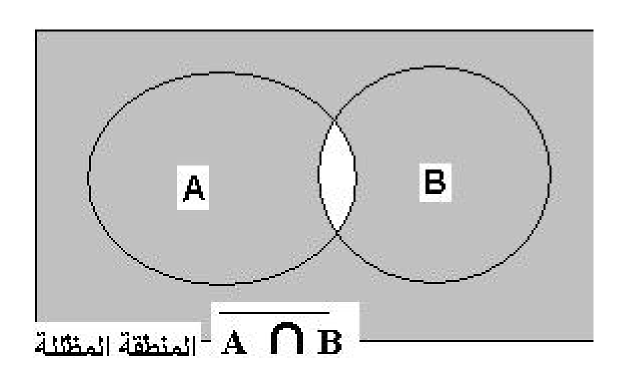
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(7) قوانين دي مورغان De Morgan Laws

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$





نقوم الآن بإثبات بعض هذه القوانين على أن يقوم الدارس بإثبات باقي القوانين:

1- إثبات قانون دي مورغان

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

لاثبات هذا القانون لاحظ أن:

$$\overline{A \cap B} = \{x: \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$$

نستخدم الآن قانون دي مورغان في المنطق ، لنحصل على

$$\overline{A \cap B} = \{x: x \notin A \vee x \notin B\}$$
$$= \{x : x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}\}$$
$$= \{x : x \in \bar{A} \cup \bar{B}\}$$
$$= \bar{A} \cup \bar{B}$$

2− اثبات قانون التوزيع : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

الإثبات: من تعريف التقاطع والاتحاد، نلاحظ أن

$$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \wedge x \in B \cup C\}$$
$$= \{x : x \in A \wedge (x \in B \text{ or } x \in C)\}$$

والآن نطبق قانون التوزيع في المنطق، أي

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

لنحصل على

$$A \cap (B \cup C) = \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\}$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2.7 الفئات في لغة باسكال

يمكن تعريف المتغيرات في لغة باسكال بأنها من نوع الفئة باستخدام الكلمة المحجوزة: SET OF . مثلا إذا كتبنا في بداية البرنامج

```
TYPE staff = (Ali, Raja, Ahmed, Adel) ;
 VAR          p, q, r, u : SET OF Staff ;
```

حيث Staff الفئة الشاملة ، في هذه الحالة يمكن تحديد الفئات وعناصرها بجملة تعيين مثل

```
p:= [Ali, Adel] ;
q:= [Ali, Raja] ;
```

ويمكن إيجاد التقاطع بين فئتين باستخدام إشارة * ،مثل

```
r := p * q
```

ولايجاد الاتحاد نستعمل إشارة + ، مثل

```
u:= p + q ;
```

ونستخدم الكلمة المحجوزة IN للدلالة على انتماء عنصر إلى فئة مثل :

```
IF  m  IN  r  THEN  i:= i + 1 ;
```

2.8 تمــارين (5)

1- دع A تمثل فئة الطلبة المسجلين بمقرر (التراكيب المنفصلة) ، B فئة الطلبة المسجلين بمقرر (البرمجة بلغة باسكال) . قم بوصف الفئات التالية:"

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$
c) $A - B$ d) $b - A$

2- دع

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{0, 3, 6\}$

أوجد

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

c) $A - B$ d) $B - A$

3- إذا كان A فئة . اثبت أن

$$\overline{\overline{A}} = A$$

4- إذا كان A , B فئتينن ، اثبت أن

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

5- اثبت أن

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

6- إذا كان

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

أوجد

a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cup B \cup C$
c) $(A \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$

7- ما هي العلاقة بين الفئة A , B عندما تكون الجمل التالية صحيحة TRUE؟

a) $A \cup B = A$ b) $A \cap B = A$
c) $A - B = A$ d) $A \cap B = B \cap A$
e) $A - B = B - A$

8- أكتب برنامج بلغة باسكال لحساب عدد الطلبة في تقاطع فئتين معلومتين، حيث كل فئة تمثل أسماء الطلبة المسجلين في مقرر دراسي.

3

الباب الثالث

الدوال Functions

3.1 مقدمة

تعتبر الدالة function من المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات والحاسوب. ورغم ذلك فإن الدالة لم يتم تعريفها بصورة واضحة وشاملة إلا حديثا. في هذا الباب نقوم بتعريف العلاقات والدوال وأنواعها وخصائصها.

3.2 العلاقة والدالة

1- العلاقة relation بين فئتين A و B هي أي فئة جزئية من الضرب الكارتيزي AxB.

مثال: دع

A = {1, 2, 3}
B = {a, b}
R = {(1, a), (2, b), (3, a)}

نلاحظ هنا أن R هي فئة جزئية من AxB لذلك فهي تعتبر علاقة بين A و B.

2- الدالة **f** هي علاقة بين الفئة A و B بحيث

$$(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \leftrightarrow y=z$$

بتعبير آخر، فإن الدالة تتطلب أن العنصر الواحد في الفئة A لا يقابله في الفئة B إلا عنصر واحد فقط. ولكن من الممكن تعيين عنصر واحد في الفئة B لأكثر من عنصر واحد في الفئة A .

فإذا تم تعيين العنصر b للعنصر a بواسطة الدالة f فإننا نعبر عن ذلك كالتالي:

$$b=f(a)$$

كما نستخدم الاختصار

$$f : A \rightarrow B$$

للتعبير عن أن f دالة من الفئة A الى الفئة B.

Let A and B be sets. A **function *f* from *A* to *B***, written

$$f: A \rightarrow B$$

is a subset $f\subseteq (A \times B)$ which satisfies:

(*) for each $a \in A$ there exists a unique $b \in B$ such that

$$(a, b) \in f.$$

The set A is called the **domain**, and the set B the **codomain**, of f.

If $(a, b) \in f$ the element $b \in B$ is called the **image** of $a \in A$ and is written

$$b = f(a)$$

A function is also called a **mapping** or a **transformation**

مثال:

لتكن الفئة A هي طلاب مادة (التراكيب المنفصلة) ، والفئة B درجاتهم في هذه المادة. هل العلاقة بين الطلاب ودرجاتهم تعتبر **دالة؟**

الاجابة نعم حيث يوجد لكل طالب درجة واحدة في المادة الواحدة. صحيح أنه يمكن أن يكون لطالبين أو أكثر نفس الدرجة ولكن لا يجوز أن يكون لطالب واحد درجتان أو أكثر. لذلك تعتبر هذه العلاقة دالة.

مثال : إذا تحصل الطالب (سعيد) على درجة 65 في هذه المادة ، فكيف نعبر عن ذلك بالرموز؟

الاجابة: يمكن أن نعبر عن ذلك كالآتي:

$$f(\text{سعيد}) = 65$$

حيث f ترمز للدرجة.

ملاحظات:

1- تكتب الدالة على الشكل

$$f : A \rightarrow B$$

حيث تسمى الفئة A **النطاق** domain و تسمى الفئة B **المدى** range أو النطاق المقابل codomain.

2- تسمى النقطة f(a) بصورة a، كما تسمى الفئة f(A) **بصورة** A (**image** of A) حيث

$$f(A) = \{y : y = f(x) \ \forall \ x \in A\}$$

3- **الدالة التناقصية**

تعتبر الدالة f تناقصية decreasing إذا كان

$$x < y \leftrightarrow f(x) > f(y)$$

لجميع y , x في النطاق .

وتعتبر **تزايدية** increasing إذا كان

$$x < y \leftrightarrow f(x) < f(y)$$

4- دالة الوحدة (أو الدالة المحايدة) identity function هي الدالة

$$i : A \rightarrow A$$
$$i(x)=x$$

3.3 دالة واحد لواحد (1-1) one-to-one function

تعتير الدالة f من نوع واحد لواحد ونرمز لها بالرمز 1-1 إذا حققت :

$$f(a) = f(b) \leftrightarrow a = b$$

أي أن f(a)=f(b) إذا وفقط إذا كانت a=b .

ويوصف هذا النوع بالدوال الحقنية injective functions .

مثال: دع $f: A \rightarrow B$

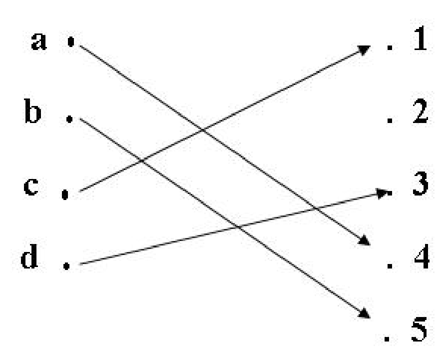
حيث

$A = \{a, b, c, d\}$

$f(a) = 4 , f(b) = 5 , f(c) = 1 , f(d) = 3$

هل هذه الدالة من نوع 1−1 ؟ وضّح بالرسم.

الإجابة: نعم هذه الدالة من نوع 1−1 كما يبين الشكل التالي حيث نلاحظ أنه يوجد سهم واحد من كل نقطة في الفئة A الى النقطة في الفئة B:



دالة من نوع 1−1

مثال: هل الدالة $f(x) = x^2$

من نوع 1−1 ؟ علما بأن نطاقها هو فئة الأعداد الصحيحة Z .

الإجابة:

لا . لأن فئة الأعداد الصحيحة Z تحتوي على الاعداد الموجبة والسالبة، وحيث أن

$$(-x)^2 = x^2$$

فإن

$$f(x)=f(-x)$$

وهذا يعني أنها ليست 1−1.

مثال: هل الدالة $f(x) = 2x + 1$ من نوع 1−1 حيث x تنتمي إلى فئة الأعداد الحقيقية ؟

الإجابة :

نعم . فمن الواضح هنا أن إذا وجدت x و y بحيث $f(x)=f(y)$ فإن ذلك يعني أن $2x+1=2y+1$ وبطرح 1 من الطرفين نجد أن $2x=2y$ ، أي أن

$$f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y$$

مما يدل على أن f من نوع 1−1.

3.3 الدالة الفوقية **onto** function

هي الدالة f التي تحقق الشرط التالي :

$$f: A \rightarrow B$$

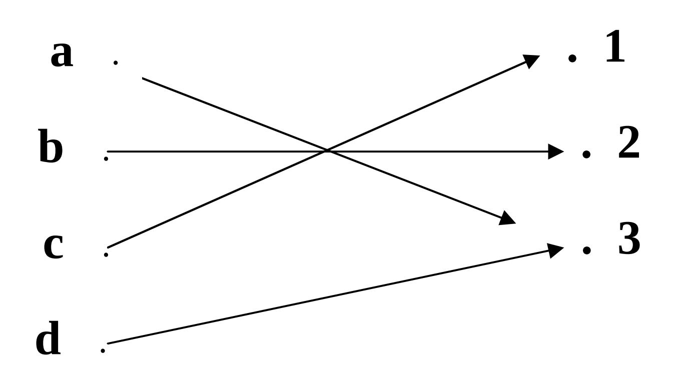
$$\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$$

وهذا يعني أن لكل عنصر b في B يوجد عنصر a في A بحيث $b=f(a)$.

أي لا يوجد عنصر في B لايقابله عنصر في A .

ملاحظة: الدالة الفوقية تسمى بالانجليزية أيضا surjective. وإذا كانت الدالة من نوع 1−1 وفوقية فتسمى bijective.

مثال : الشكل التالي يبين دالة فوقية (أي من نوع onto) ولكن ليست 1−1 .



مثال: دع

$$f: Z \rightarrow Z$$
$$f(x) = x^2$$

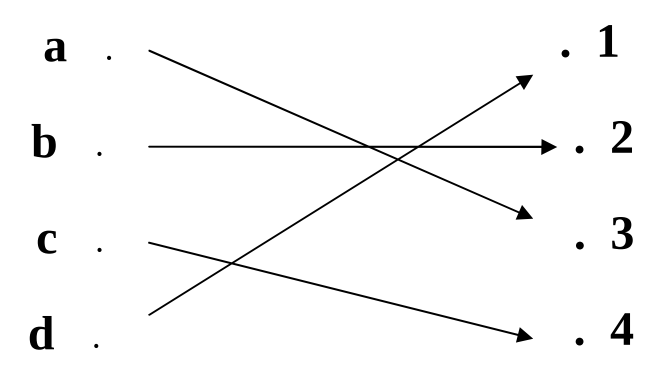
حيث Z فئة الأعداد الصحيحة integers

هل f من نوع onto ؟

الإجابة: لا . لأن الأعداد السالبة تعتبر أعدادا صحيحة ، ولكن f(x) في هذا المثال لا تكون سالبة.

على سبيل المثال لا يوجد عدد صحيح x بحيث $x^2 = -1$.

مثال: هل العلاقة التالية تعتبر دالة فوقية onto ؟ هل هي من نوع 1-1؟



الاجابة نعم هي فوقية وأيضا 1−1 حيث نجد أن كل عنصر في المدى يقابله عنصر في النطاق (فوقية) كما أنه لايوجد إلا عنصر واحد في النطاق لكل عنصر في المدى (1−1).

مثال: الدالة $f(x) = x$ بحيث $f: Z \rightarrow Z$
فوقية و1−1 وهي تسمى : دالة الوحدة identity function

3.4 معكوس الدالة inverse function

إذا كانت

$$f : A \rightarrow B$$

دالة فوقية وأيضا واحد لواحد (أي bijective) فإنه يوجد دالة

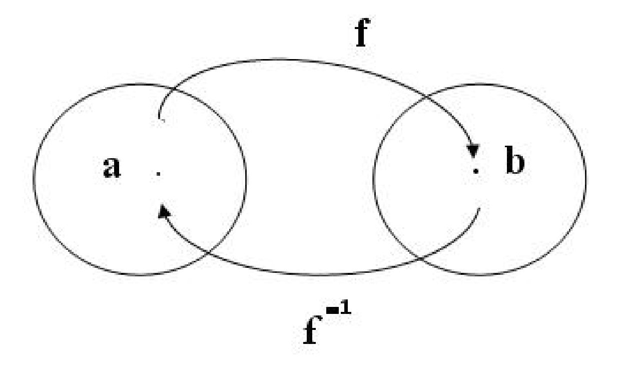
$g : B \rightarrow A$

بحيث

$f(b) = a \quad \leftrightarrow \quad g(a) = b$

وتسمى g بمعكوس الدالة f . وغالبا ما نرمز لها بالرمز f^{-1}

والشكل التالي يبين هذه العلاقة :



مثال: إذا كان $f:\{a, b, c\} \rightarrow \{2, 3, 5\}$ بحيث

$f(a) = 2 \quad f(b) = 5 \quad f(c) = 3$

فإن هذه الدالة تحقق الخاصيتين (1–1 و فوقية) ، ومعكوسها هو الدالة f^{-1}

حيث $f^{-1}(2) = a$, $f^{-1}(3) = c$, $f^{-1}(5) = b$

مثال: هل يوجد معكوس للدالة $f(x) = x^2$ حيث النطاق هو $\{-2,-1,0,1,2\}$؟

الإجابة: لا، لأن هذه الدالة ليست واحد لواحد one-to-one

3.5 الدالة المركبة composite function

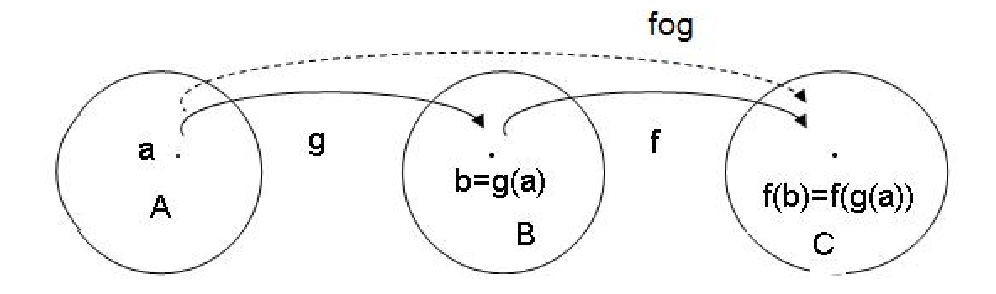
إذا كان لدينا دالتان f و g بحيث

f: A→B
g: B→C

يمكننا تعريف دالة نرمز لها بالرمز fog بحيث

$$(fog)(a) = f(g(a))$$

وهي تسمى دالة مركبة. ويمكن توضيحها بالرسم التالي:



وبنفس الطريقة فإن

$$(gof)(a) = g(f(a))$$

مثال: إذا كان

g(a) = b
g(b) = c
g(c) = a

وكانت

f(a) = 3

$f(b) = 2$
$f(c) = 1$

أوجد قيمة

(أ) الدالة المركبة $fog(x)$

(ب) الدالة المركبة $gof(x)$

عند $x = a, b, c$

الإجابة:

(أ)

$fog(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$
$fog(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$
$fog(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$

(ب)

$gof(a) = g(f(a)) = g(3) = ?$

نلاحظ أن $g(3)$ غير معرفة ، وبالتالي لا يمكن حساب الدالة gof عند النقاط (a, b, c)

مثال: إذا كانت

$f(x) = 2x + 3$
$g(x) = 3x + 2$

أوجد fog ، gof

الإجابة:

$y = g(x) \quad z = f(x)$ دع

$$fog(x) = f(g(x)) = f(y) = 2y + 3$$
$$= 2(3x + 2) + 3 = 6x + 4 + 3$$
$$= 6x + 7$$

$$gof(x) = g(f(x)) = 3z + 2$$
$$= 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

ملاحظات(1) من المثال السابق نرى بصورة عامة أن

$$fog \neq gof$$

مثال : إذا كانت f دالة من نوع 1−1 و فوقية ، بين أن

$$f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$$

أي أن

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$$

بعبارة أخرى فإن معكوس المعكوس هو الدالة المحايدة identity function .

أي

$$(f^{-1})^{-1}(z) = i(z) = z$$

لجميع z في النطاق.

الاجابة :

$$y=f(x) \rightarrow x= f^{-1}(y) =f^{-1}(f(x)$$
$$y = f(x)=f(f^{-1}(y)) \rightarrow x=f(f^{-1}(x))$$

3.6 شكل الدالة   Graph of a function

إذا كان

$$f: A \rightarrow B$$

فإن شكل الدالة هو الفئة :

$$G = \{(a, b) : a \in A , b = f(a)\}$$

حيث (a, b) يسمى زوج مرتب ordered pair

مثال: ما هو شكل الدالة:

$$f(n) = 2n + 1$$

حيث

$$f : A \rightarrow Z$$

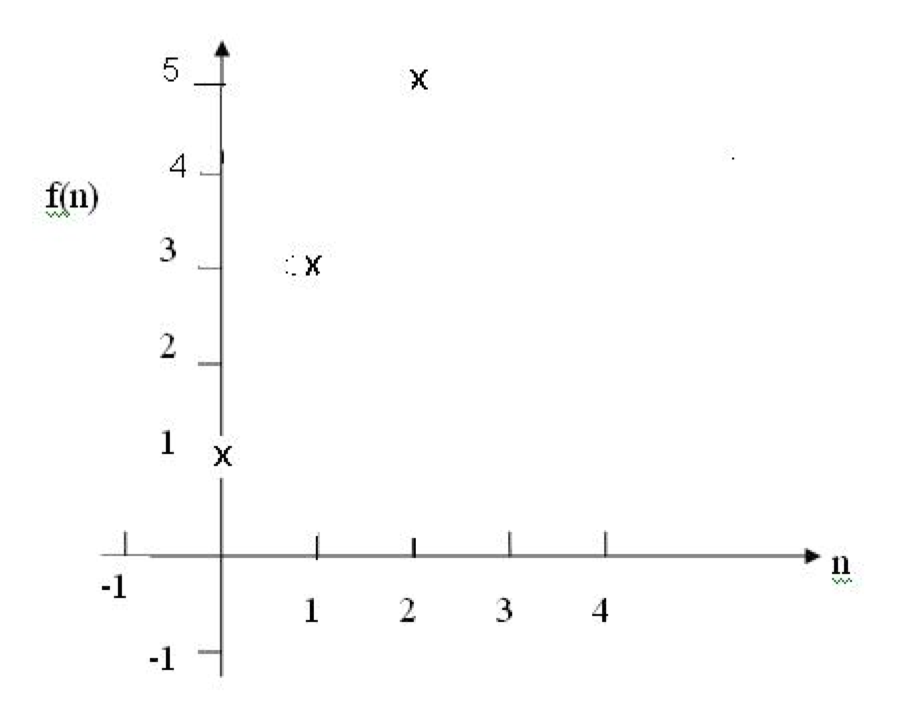
علما بأن Z هي فئة جميع الأعداد الصحيحة. وأن

$$A = \{ 0, 1, 2\}$$

الإجابة:

$$G = \{ (0,1), (1,3), (1,5) \}$$

ويمكن تمثيل هذه الفئة بالشكل التالي:

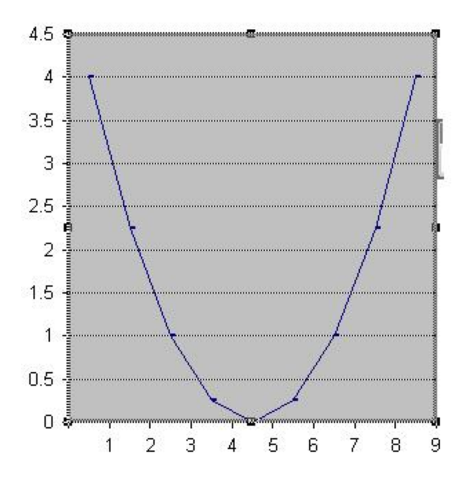


تبين النقاط المبينة بالعلامة x في هذا الشكل الدالة $f(n) = 2n + 1$.

مثال: ما هو شكل الدالة $f(x) = (x-4.5)^2/16$ حيث $f: [0.5, 8.5] \to R$

حيث [0.5, 8.5] هي الفترة المغلقة من 0.5 إلى 8.5 و R فئة الأعداد الحقيقية .

الإجابة: يمكننا رسم منحنى لهذه الدالة (وهي دالة متصلة وليست منفصلة كما في المثال السابق) وذلك بأخذ بعض النقاط في النطاق المحدد ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط لنحصل على الشكل التالي:



شكل الدالة $f(x) = (x-4.5)^2/16$

3.7 تمـــــارين (6)

1) هل الدوال التالية من نوع 1−1 ؟

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$
b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$
c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

علما بأن

$$f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$$

2) أي من الدوال في تمرين (1) تعتبر onto ؟

3) هل الدوال التالية تعتبر 1−1 وفوقية؟

a) $f(x) = -3x + 4$
b) $f(x) = -3x^2 + 7$
c) $f(x) = x^3$

علما بأن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

4) بين أنه إذا كانت g دالة من A إلى B ، f دالة من B إلى C فإن :

(أ) إذا كانت g , f من نوع 1− 1 فإن fog من نوع 1−1 .

(ب)إذا كانت g , f فوقية onto فإن fog فوقية.

5) هل الدالة

$f(x) = 4x + 5$

حيث $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

لها معكوس؟ ما هو؟

6) ارسم الدالة

$f(n) = 1 - n^2$

حيث $f: D \to D$

$D = \{-2,-1,0,1,2\}$

7) الدالة $f(x) = x^3 + 1$ نطاقها ومداها جميع الأعداد الحقيقية. هل لها معكوس ؟ ما هو ؟